UNIDAD 2: MATRICES Y DETERMINANTES

En esta unidad haremos un estudio de los aspectos más indispensable de matrices y determinantes. Se utilizan notaciones generalizadas.

2.1 Matrices

DEF. Se llama MATRIZ de orden m$\times$n y se denota con letras mayúsculas A,B,... a un arreglo rectangular de mn números de un conjunto K, (K mínimo un anillo) dispuestos en m filas y n columnas encerrados en corchetes o en paréntesis; esto es :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ .. & .. & \dots & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

donde: **m** indica el número de filas y **n** el número de columnas, a_{ij} es el elemento de A ubicado en la fila i, y en la columna j; por ejemplo, el elemento a_{23} está en la fila 2 y en la columna 3. Si m = n la matriz se dice cuadrada, caso contrario se dice rectangular.

Al conjunto de todas las matrices de orden m$\times$n con elementos en K denotaremos con:

$M_{m\times n}(K)$ (se lee "conjunto de matrices de orden m$\times$n a valores en K")

Cada fila o renglón $\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & . . . & a_{in} \end{bmatrix}$ de A llamaremos vector fila i-ésima, y denotaremos con A_i; luego, la matriz A puede expresarse en vectores filas, así:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ . . . \\ A_m \end{bmatrix}$$

Cada columna $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ . . . \\ a_{mj} \end{bmatrix}$ de A llamaremos vector columna j-ésima de A, y denotaremos con

A^j; luego, la matriz A puede expresarse en vectores columnas, así:

$$A = \begin{bmatrix} A^1 & A^2 & . & . & . & A^n \end{bmatrix}$$

EJEMPLO 1. A continuación tenemos una matriz cuadrada A de orden 3$\times$3, y una matriz rectangular B de orden 2$\times$3

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 3 & 7 & -9\\ -2 & -4 & 7\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}3 & 4 & -2\\ 9 & 7 & 5\end{bmatrix}$$

NOTA. En esta parte veamos algunos **tipos de matrices**:

1) **Identidad** (I) , si $\forall$ i =1,...,n $a_{ii}=1$ y ceros los demás elementos; 2) **Matriz cero**, si $\forall$i,j $a_{ij}=0$; 3) Si $A=(a_{ij})$ se llama **transpuesta** de A y se denota A^t a la matriz $A^t=(a_{ji})$;
4) **Simétrica** si $A=A^t$; 5) **Antisimétrica** si $A=-A^t$; 6) $\mathbf{A}\in M_{nxn}(K)$ se dice **Escalar** si es de la forma aI; 7) **Triangular superior** si $a_{ij}=0$ cuando i>j; 6) **Triangular inferior** si $a_{ij}=0$ cuando i<j; 9) $\mathbf{A}\in M_{nxn}(K)$ se dice **Diagonal** si $\forall$i,j $i\neq j$ $a_{ij}=0$; 10) **Idempotente** si $A^2=A$; 11) **Nilpotente** si $A^n=0$ para algún entero positivo n;
12) $\mathbf{A}\in M_{nxn}(K)$ se dice **Involutiva** si $A^2=I$, 13) **Ortogonal** si $A.^tA=I$. Se llama **Matriz conjugada** de A y se denota $\overline{A}$ a la matriz $\overline{A}=(\overline{a}_{ij})$; 11) **Hermitiana** si $A=\overline{A}^t$,
12) **Antihermitiana** si $A=-\overline{A}^t$; 13) **Unitaria** si $A\overline{A}^t=I$.

DEF. Sea $\mathbf{A}\in M_{nxn}(K)$. Se llama Traza de A al número: $\mathrm{Trz}(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$

2.1.1 Operaciones algebraicas con matrices: Adición, multiplicación, potenciación

2.1.1.1 Adición

Sean $A,B\in M_{mxn}(K)$

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2n}\\ . & . & . & . & .\\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & a_{mn}\end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & . & . & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & . & . & b_{2n}\\ . & . & . & . & .\\ b_{m1} & b_{m2} & . & . & b_{mn}\end{bmatrix}$$

la adición entre A y B se define así:

$$A+B:=\begin{bmatrix}a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & . & . & a_{1n}+b_{1n}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & . & . & a_{2n}+b_{2n}\\ . & . & . & . & .\\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & . & . & a_{mn}+b_{mn}\end{bmatrix}$$

Ahora de manera corta; sean $A=(a_{ij}),\ B=(b_{ij})$ matrices de orden mxn; entonces se tiene:

$$A+B=(c_{ij})\ \text{ donde } \forall i,j\quad 1\le i\le m,\ 1\le j\le n\quad c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$$

DEF. Se llama opuesta de A a la siguiente matriz:

$$-A=\begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & ..... & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & ..... & -a_{2n} \\ .. & .. & ..... & .. \\ -a_{m1} & -a_{m2} & ..... & -a_{mn} \end{bmatrix}$$

NOTA. La sustracción se define así: A-B:= A+(-B)

2.1.1.2 Multiplicación

Sean: $A\in M_{mxn}(K)$, $B\in M_{nxp}(K)$, la multiplicación entre A y B se define así:

$$AxB := \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{1i}b_{i1} & \sum_{i=1}^{n} a_{1i}b_{i2} & . \;\; . & \sum_{i=1}^{n} a_{1i}b_{ip} \\ \sum_{i=1}^{n} a_{2i}b_{i1} & \sum_{i=1}^{n} a_{2i}b_{i2} & . \;\; . & \sum_{i=1}^{n} a_{2i}b_{ip} \\ . & . & . \;\; . & . \\ \sum_{i=1}^{n} a_{mi}b_{i1} & \sum_{i=1}^{n} a_{mi}b_{i2} & . \;\; . & \sum_{i=1}^{n} a_{mi}b_{ip} \end{bmatrix}$$

resulta una matriz de orden mxp, donde **m** es el número de filas de A y **p** el número de columnas de B.

De manera corta, la multiplicación se define así:

$$AB = (a_{ij})(b_{jk}) = (c_{ik}),\ \text{donde } \forall i\ 1\le i\le m,\ \forall k\ 1\le k\le p \qquad c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$$

NOTA. Por ejemplo, el elemento $\mathbf{c_{11}}$ se obtiene multiplicando la fila 1 de A por la columna 1 de B, esto es:

$$c_{11}= a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}+ . . . +a_{1n}b_{n1} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\, b_{j1}$$

el elemento $\mathbf{c_{12}}$ se obtiene multiplicando la fila 1 de A por la columna 2 de B, esto es:

$$c_{12}= a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}+ . . . +a_{1n}b_{n2} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\, b_{j2}$$

EJEMPLO 2

Dadas las matrices:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Hallar: a) A+B, b) A-B, c) 2A-3B, d) AB, e) BC

$$\text{a)}\ A+B=\begin{bmatrix}2&3&-1\\1&0&-2\\-1&2&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&-2&1\\2&0&-2\\-1&3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2+1&3-2&-1+1\\1+2&0+0&-2-2\\-1-1&2+3&1+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&1&0\\3&0&-4\\-2&5&2\end{bmatrix}$$

$$\text{b)}\ A-B=\begin{bmatrix}2&3&-1\\1&0&-2\\-1&2&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&-2&1\\2&0&-2\\-1&3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2-1&3+2&-1-1\\1-2&0-0&-2+2\\-1+1&2-3&1-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&5&-2\\-1&0&0\\0&-1&0\end{bmatrix}$$

$$\text{c)}\ 2A-3B=2\begin{bmatrix}2&3&-1\\1&0&-2\\-1&2&1\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}1&-2&1\\2&0&-2\\-1&3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4-3&6+6&-2-3\\2-6&0-0&-4+6\\-2+3&4-9&2-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&12&-5\\-4&0&2\\1&-5&-1\end{bmatrix}$$

$$\text{d)}\ AB=\begin{bmatrix}2&3&-1\\1&0&-2\\-1&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2&1\\2&0&-2\\-1&3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9&-7&-5\\3&-8&-1\\2&5&-4\end{bmatrix}$$

$$\text{e)}\ BC=\begin{bmatrix}1&-2&1\\2&0&-2\\-1&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&2&-2\\0&-2&3&1\\-3&2&1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&5&-3&-5\\8&-6&2&-2\\-4&-3&8&4\end{bmatrix}$$

TEOREMA 1. El **conjunto de las matrices** cuadradas de orden n con elementos en K "$M_{nxn}(k)$" con las operaciones internas adición (+) y multiplicación (x) **es un Anillo**

Prueba

1. $(M_{nxn}(k),+)$ es un grupo abeliano; ya que:

a) $M_{nxn}(k)$ es cerrado respecto al +; esto es

$$\forall A,B\in M_{nxn}(k)\quad A+B\in M_{nxn}(k)$$

En efecto, Sean

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&\dots&a_{2n}\\ \dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\ \dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{n1}&a_{n2}&a_{n3}&\dots&a_{nn}\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}&\dots&b_{1n}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}&\dots&b_{2n}\\ \dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\ \dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\b_{n1}&b_{n2}&b_{n3}&\dots&b_{nn}\end{bmatrix}$$

la adición entre A y B es:

$$A+B=\begin{bmatrix}a_{11}+b_{11}&a_{12}+b_{12}&a_{13}+b_{13}&\dots&a_{1n}+b_{1n}\\a_{21}+b_{21}&a_{22}+b_{22}&a_{23}+b_{23}&\dots&a_{2n}+b_{2n}\\ \dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{n1}+b_{n1}&a_{n2}+b_{n2}&a_{n3}+b_{n3}&\dots&a_{nn}+b_{nn}\end{bmatrix}\in M_{nxn}(k)$$

Ahora de manera corta.

Poniendo $A=[a_{ij}], B=[b_{ij}]$ de orden n, se tiene:

$$A+B=[a_{ij}]+[b_{ij}]=[a_{ij}+b_{ij}]\in M_{nxn}(k).$$

NOTA. Se puede sumar tranquilamente dos matrices $A,B\in M_{mxn}(k)$

b) El + es conmutativo en $M_{nxn}(k)$; esto es

$$\forall A,B\in M_{nxn}(k) \quad A+B = B+A$$

c) El + es asociativo en $M_{nxn}(k)$; esto es

$$\forall A,B,C \in M_{nxn}(k) \quad (A+B)+C = A+(B+C)$$

d) Existe la matriz **o** como elemento neutro respecto al + en $M_{nxn}(k)$; esto es

$$\exists \mathbf{o}\in M_{nxn}(k) \ / \ \forall A\in M_{nxn}(k) \quad A+\mathbf{o} = A$$

e) Cada $A\in M_{nxn}(k)$ tiene su simétrica respecto al +; esto es

$$\forall A\in M_{nxn}(k) \ \exists\ (-A)\in M_{nxn}(k) \ / \ A+(-A) = \mathbf{o}$$

2. ($M_{nxn}(k)$, x) es un semigrupo; ya que:

f) $M_{nxn}(k)$ es cerrado respecto al x; es decir se cumple que:

$$\forall A,B\in M_{nxn}(k) \quad A\text{x}B\in M_{nxn}(k)$$

En efecto:

$$A\text{x}B = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k2} & \cdot\ \cdot\ \cdot & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{kn} \\ \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{k2} & \cdot\ \cdot\ \cdot & \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{kn} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \sum_{k=1}^{n} a_{nk}b_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{nk}b_{k2} & \cdot\ \cdot\ \cdot & \sum_{k=1}^{n} a_{nk}b_{kn} \end{pmatrix} \in M_{nxn}(k)$$

g) El x es asociativo en $M_{nxn}(k)$; es decir

$$\forall A,B,C\in M_{nxn}(k) \quad (A\text{x}B)\text{x}C = A\text{x}(B\text{x}C).$$

Probemos de manera corta que esta propiedad vale en todos los casos en que el producto esté bien definido; en decir, AxB se puede realizar siempre que el número de columnas de A sea igual al número de filas de B. Veamos:

Sean las matrices:

$A\in M_{pxq}(K)$, $B\in M_{qxr}(K)$, $C\in M_{rxs}(K)$; se tiene:

$A\text{x}B = D = (d_{ij})$ con $d_{ij} = \sum_{k=1}^{q} a_{ik}b_{kj}$, $B\text{x}C = E = (e_{kh})$ con $e_{kh} = \sum_{j=1}^{r} b_{kj}c_{jh}$

$$(A{\times}B){\times}C = D{\times}C = F = (f_{ih}) \text{ con } f_{ih} = \sum_{j=1}^{r} d_{ij}c_{jh}$$

$$A{\times}(B{\times}C) = A{\times}E = G = (g_{ih}) \text{ con } g_{ih} = \sum_{k=1}^{q} a_{ik}e_{kh}$$

debe cumplirse que $f_{ih}= g_{ih}$; en efecto

$$f_{ih} = \sum_{j=1}^{r} d_{ij}c_{jh} = \sum_{j=1}^{r}\left(\sum_{k=1}^{q} a_{ik}b_{kj}\right)c_{jh} = \sum_{j=1}^{r}\left(\sum_{k=1}^{q} a_{ik}b_{kj}c_{jh}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{q}\left(\sum_{j=1}^{r} a_{ik}b_{kj}c_{jh}\right) = \sum_{k=1}^{q} a_{ik}\left(\sum_{j=1}^{r} b_{kj}c_{jh}\right) = \sum_{k=1}^{q} a_{ik}e_{kh} = g_{ih}$$

También se puede probar de esta manera directa:

$$(A{\times}B){\times}C = \left(\sum_{k=1}^{q} a_{ik}b_{kj}\right)C = \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{q} a_{ik}b_{kj}c_{jh} = \sum_{k=1}^{q}\sum_{j=1}^{r} a_{ik}b_{kj}c_{jh} =$$

$$= \sum_{k=1}^{q} a_{ik}\sum_{j=1}^{r} b_{kj}c_{jh} = A\left(\sum_{j=1}^{r} b_{kj}c_{jh}\right) = A{\times}(B{\times}C)$$

3. El $\times$ es distributivo con el +; esto es

$$\forall A,B,C \in M_{nxn}(k) \quad A{\times}(B+C) = A{\times}B + A{\times}C$$

Probemos en forma abreviada:

$$A{\times}(B+C) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(b_{jh} + c_{jh}\right)\right) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jh} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_{jh}\right) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jh}\right) + \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_{jh}\right) =$$

$$= A{\times}B + A{\times}C$$

2.1.1.3 Potenciación

DEF. Sea $\mathbf{A} \in M_{nxn}(K)$, entonces: $A^k := A.A^{k-1}$ con $k \in \mathbf{Z}^+$

Sean $\mathbf{A,B} \in M_{nxn}(K)$. Si una de las dos matrices es una **matriz escalar**, esto es, de la forma aI, entonces podemos aplicar la fórmula del Binomio de Newton a su suma, es decir:

$$(A+B)^n = \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}A^{n-p}B^p \qquad \text{con } n \in \mathbf{Z}^+$$

NOTA. El binomio de Newton no vale para la suma de dos matrices cualesquiera; ya que, el binomio de Newton se aplica a elementos mínimo de un anillo conmutativo, y las matrices forman una estructura de anillo pero no es conmutativo.

EJEMPLO 3

Hallar A^n siendo $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Expresamos la matriz A como una suma de una matriz escalar y una matriz B, esto es:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3I+B \text{ con } B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Hallamos las potencias de B; esto es:

$$B^2 = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \; B^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como desde B^3 en adelante son las matrices ceros, se tiene

$$A^n = (3I+B)^n = \sum_{p=0}^{2} \binom{n}{p} (3I)^{n-p} B^p = (3I)^n + n(3I)^{n-1}B + \frac{n(n-1)}{2}(3I)^{n-2}B^2 =$$

$$= \begin{bmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2n3^{n-1} & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 4n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4n(n-1)3^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3^n & -2n3^{n-1} & n(7-4n)3^{n-2} \\ 0 & 3^n & 4n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{bmatrix}$$

2.1.2 Operaciones elementales entre filas o columnas de una matriz

DEF. Sea $A \in M_{mxn}(K)$. Se llaman **operaciones elementales** sobre las filas (columnas) de A a las siguientes:

1. Intercambio de 2 filas (columnas) de A
2. Multiplicación de una fila (columna) de A por un $a \in K^*$; $K^* = K - \{0\}$
3. Adición a una fila (columna) de A otra fila (columna) de A multiplicada por un $b \in K^*$.

NOTA. Una operación elemental sobre filas (columnas) se dice del tipo 1, 2 o 3 según sea la operación elemental 1, 2 o 3.

DEF. Dos matrices: $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ de $M_{mxn}(K)$ son iguales sí y sólo sí

$$\forall i = 1, \ldots, m \; ; \; \forall j = 1, \ldots, n \quad a_{ij} = b_{ij}$$

DEF. Si una matriz B se obtiene de A mediante operaciones elementales, entonces se dice que A y B son equivalentes por filas.

DEF. Se llama MATRIZ ELEMENTAL de orden n a la matriz E que se obtiene de la matriz identidad I mediante una operación elemental.

2.1.3 Matriz escalonada

DEF. Se dice que una matriz $\mathbf{A} \in M_{mxn}(K)$ está ESCALONADA por filas (en forma reducida o canónica) si:

1. Todas las filas con elementos no nulos preceden a las filas que tienen todos los elementos nulos.
2. En cada fila el primer elemento no nulo es 1 y es el único elemento no nulo de su respectiva columna.
3. El primer elemento no nulo 1 de cada fila pertenece a una columna que sigue a las columnas que tienen 1 como primer elemento de las filas anteriores.

DEF. Se llama RANGO de A y se denota Rng(A), al número **r** que es el número de filas no nulas de la matriz escalonada de A; esto es: Rng(A) = r

TEOREMA 2. Toda matriz $\mathbf{A} \in M_{mxn}(K)$ se puede escalonar de una y una sola manera mediante un número finito de operaciones elementales por filas.

TEOREMA 3. Las operaciones elementales de una matriz conservan el rango de una matriz.

EJEMPLO 4.

Escalone la siguiente matriz A en forma reducida, e indique su rango.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 7 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 12 \end{bmatrix}$$

Intercambiando las dos primeras filas, se tiene

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 7 \\ 3 & 1 & 1 & 12 \end{bmatrix}$$

luego, con el 1 de la primera columna y primera fila hacemos ceros en los otros puestos de la columna; así: se multiplica la fila 1 por -2 y se suma a la segunda, luego se multiplica la primera fila por -3 y se suma a la tercera, esto es

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 7 \\ 3 & 1 & 1 & 12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & 5 \\ 0 & 7 & -5 & 9 \end{bmatrix}$$

simbólicamente se expresa: $F_2 \leftarrow -2F_1 + F_2$ y $F_3 \leftarrow -3F_1 + F_3$

Luego, dividiendo la segunda fila por 5 y con el uno que se obtiene en el puesto 22 se hace ceros en los otros lugares de la columna; esto es

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & -5 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

simbólicamente se expresa: $F_1 \leftarrow 2F_2 + F_1$ y $F_3 \leftarrow -7F_2 + F_3$

finalmente se divide la tercera fila por 2 y con este 1 obtenido en el puesto 33 se hace cero en el puesto 23, esto es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

hemos hecho $F_2 \leftarrow F_3 + F_2$

siendo esta última la matriz escalonada de A en forma canónica; por lo tanto Rng(A) = 3

2.1.4 Inversa de una matriz, varios métodos

DEF. Una matriz $\mathbf{A} \in M_{nxn}(K)$ es INVERTIBLE si existe una matriz $B \in M_{nxn}(K)$ tal que: $AB = BA = I$. La matriz B se llama inversa de A y se denota A^{-1}.

DEF. Sean: $A \in M_{mxn}(K)$, $B \in M_{mxp}(K)$. Se llama MATRIZ AUMENTADA entre A y B a la matriz $(A \mid B) \in M_{mx(n+p)}(K)$

2.1.4.1 PRIMER MÉTODO para hallar la inversa.

TEOREMA 4. $\mathbf{A} \in M_{nxn}(K)$ es invertible si y sólo si la matriz aumentada [A|I] mediante operaciones elementales por filas se puede convertir en la matriz aumentada [I|B]. En este caso B es la inversa de A; esto es A^{-1}=B.

EJEMPLO 5. Halle la inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & -11 & 8 \\ -5 & 15 & -9 \end{bmatrix}$$

Partimos de [A|I] para mediante operaciones elementales por filas llegar a [I|B]; esto es:

$$[A|I] = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -11 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 15 & -9 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para hacer ceros en los puestos 21 y 31, se ha multiplicado la fila 1 por -4 y se ha sumado a la fila 2; luego se ha multiplicado la fila 1 por 5 y se ha sumado a la fila 3; en símbolos:

$$F_2 \leftarrow -4F_1 + F_2 \quad y \quad F_3 \leftarrow 5F_1 + F_3$$

con el 1 del puesto 22 hacemos cero en el puesto 12, haciendo: $F_1 \leftarrow 3F_2 + F_1$; o sea:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -11 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

con el 1 del puesto 33 hacemos cero en el puesto 13, haciendo: $F_1 \leftarrow -2F_3 + F_1$; o sea:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -21 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

luego, la inversa de A es :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -21 & 3 & -2 \\ -4 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.1.4.2 SEGUNDO MÉTODO para hallar la inversa

Para hallar la inversa de la matriz A de orden n, se puede considerar la matriz incógnita X de orden n, de tal manera que AX = I ; luego $A^{-1} = X$

EJEMPLO 6. Halle la inversa de $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & -11 & 8 \\ -5 & 15 & -9 \end{bmatrix}$

consideremos la matriz incógnita $X = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$

haciendo AX = I, se tiene: $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & -11 & 8 \\ -5 & 15 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

de donde se obtienen los siguientes sistemas:

$$\begin{cases} a - 3d + 2g = 1 \\ 4a - 11d + 8g = 0 \\ -5a + 15d - 9g = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} b - 3e + 2h = 0 \\ 4b - 11e + 8h = 1 \\ -5b + 15e - 9h = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} c - 3f + 2i = 0 \\ 4c - 11f + 8i = 0 \\ -5c + 15f - 9i = 1 \end{cases}$$

resolviendo éstos, se obtiene la matriz X que es la inversa de A; es decir:

$$A^{-1} = X = \begin{bmatrix} -21 & 3 & -2 \\ -4 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.1.4.3 TERCER MÉTODO para hallar la inversa

Ahora se puede considerar las matrices incógnita X e identidad I expresadas en filas; esto es:

$$X = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ . \\ . \\ F_n \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ . \\ . \\ e_n \end{bmatrix}$$

siendo $e_1 = (1,0, . . . ,0)$; $e_2 = (0,1,0, . . . ,0)$; ... ; $e_n = (0,0, . . . ,1)$

haciendo AX = I , se obtiene la X que es la inversa de A

EJEMPLO 7. Utilizando este método, halle la inversa de $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & -11 & 8 \\ -5 & 15 & -9 \end{bmatrix}$

$$AX = I \Leftrightarrow AX = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & -11 & 8 \\ -5 & 15 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = I$$

de donde se tiene

$$\begin{cases} F_1 - 3F_2 + 2F_3 = e_1 \\ 4F_1 - 11F_2 + 8F_3 = e_2 \\ -5F_1 + 15F_2 - 9F_3 = e_3 \end{cases}$$

resolviendo el sistema se obtiene: F_1 = [-21 3 -2], F_2 = [-4 1 0], F_3 = [5 0 1] que son las filas de X, luego de la inversa; por lo tanto:

$$A^{-1} = X = \begin{bmatrix} -21 & 3 & -2 \\ -4 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.2 Determinante de una matriz cuadrada

NOTA. Antes de ver la definición de determinante, recordemos que: Dada una matriz A, a la **submatriz de orden n-1** que resulta de A eliminando la fila i y la columna j denotaremos con A_{ij} (algunos autores lo llaman **adjunta** de A, nosotros la llamaremos simplemente submatriz A_{ij} de orden n-1)

DEF. El **determinante** de una matriz cuadrada A que denotaremos | A | es una aplicación de $M_{nxn}(K)$ en K; esto es:

$$|\ |: M_{nxn}(K) \to K \ / \ A \mapsto |A|$$

donde | A | se calcula de la siguiente **manera inductiva:**

1. Si $A = [a_{11}]$ entonces $|A| = |a_{11}| := a_{11}$

2. Si $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & a_{nn} \end{bmatrix}$ entonces $|A| := \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} |A_{1j}|$

Hemos aplicado esta definición a los elementos de la primera fila de A.

NOTA. Aplicando esta definición vamos a ver que los resultados que se obtienen son los que ya se conocían elementalmente:

Si n =1, se tiene: $A = [a_{11}] \Rightarrow |A| = a_{11}$

Si n =2, se tiene: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{2} (-1)^{1+j} a_{1j} |A_{1j}| =$

$$= a_{11}|a_{22}| - a_{12}|a_{21}| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Si n =3, se tiene: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{1+j} a_{1j} |A_{1j}| =$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) +$$

$$a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Así se prosigue con n≥4. Hasta aquí hemos obtenido las reglas elementales del cálculo de determinantes de segundo y tercer orden; esto es:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Estas reglas deben aplicarse directamente al resolver ejercicios.

NOTA. Así como tomamos los elementos de la primera fila, podemos tomar los de la primera columna o de cualquier fila o columna; luego, se tienen las siguientes 4 fórmulas para hallar el determinante de una matriz cuadrada:

1. La definición anterior es aplicada a los elementos de la primera fila, la fórmula es:

$$| A | = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} |A_{1j}| \qquad (1)$$

2. Aplicando la definición a los elementos de la primera columna, la fórmula es:

$$| A | = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} |A_{i1}| \qquad (2)$$

3. Aplicando la definición a los elementos de cualquier fila, la fórmula es:

$$| A | = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+J} a_{ij} |A_{ij}| \qquad (3)$$

4. Aplicando la definición a los elementos de cualquier columna, la fórmula es:

$$| A | = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+J} a_{ij} |A_{ij}| \qquad (4)$$

NOTA. Las 4 fórmulas anteriores, podemos presentarlas en una sola; esto es:

$$| A | = \sum_{i \text{ o } j=1}^{n} (-1)^{i+J} a_{ij} |A_{ij}|$$

EJEMPLO 8. Hallar el determinante de $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 13 & -8 \\ -1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$

Aplicando la fórmula (1) se tiene :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 13 & -8 \\ -1 & -3 & 3 \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{1+j} a_{1j} |A_{1j}| = 1 \begin{vmatrix} 13 & -8 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} -3 \begin{vmatrix} 4 & -8 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} -2 \begin{vmatrix} 4 & 13 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= 39-24-3(12-8)-2(12-13) = 15-12+2 = 1$$

DEF. Se llama **adjunto** (o cofactor) del elemento a_{ij} de A y se denota α_{ij} al siguiente número:

$$\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}|$$

A la MATRIZ de los ADJUNTOS denotaremos con $\mathcal{A}$ y a la TRANSPUESTA de ésta denotaremos con Adj(A); estas matrices son respectivamente :

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & . & . & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & . & . & \alpha_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & . & . & \alpha_{nn} \end{bmatrix}, \text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & . & . & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & . & . & \alpha_{n2} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & . & . & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

NOTA. Estamos en condiciones de considerar el **CUARTO MÉTODO para hallar la inversa de una matriz,** que se obtiene mediante la siguiente fórmula:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,\mathrm{Adj}(A)$$

EJEMPLO 9

Por el cuarto método, hallar la inversa de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 7 & -9 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

Hallemos $|A|$, esto es : $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 7 & -9 \\ -1 & -2 & 4 \end{vmatrix}$ = 28+18+18-18-24-21 = 1

Ahora, hallemos los 9 adjuntos α_{ij} de A ; esto es:

$\alpha_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 7 & -9 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 28 - 18 = 10$ $\alpha_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & -9 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -(12 - 9) = -3$

$\alpha_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -6 + 7 = 1$ $\alpha_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -(8 - 6) = -2$

$\alpha_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1$ $\alpha_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -(-2 + 2) = 0$

$\alpha_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 7 & -9 \end{vmatrix} = -18 + 21 = 3$ $\alpha_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -9 \end{vmatrix} = -(-9 + 9) = 0$

$\alpha_{33} = (-1)^{\#+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = (7 - 6) = 1$

luego, $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 10 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, por lo tanto Adj(A) = $\begin{bmatrix} 10 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; así, la inversa de A es:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,\mathrm{Adj}(A) = \begin{bmatrix} 10 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.2.1 Propiedades de los determinantes (14 propiedades), determinantes generalizados

Por sencillez, consideraremos una matriz A expresada en columnas, así:

$$A = \left[A^1 \quad A^2 \quad . \quad . \quad . A^n\right]$$

De esta manera, podemos expresar las propiedades de la manera más general posible. (Rogamos a los docentes ir presentando ejemplos en cada propiedad). Estas son:

1. El determinante de una matriz que tiene una columna (o fila) multiplicada por un escalar no nulo **a**, es igual al escalar **a** por el determinante de la matriz sin el escalar como factor de dicha columna (o fila); esto es:

$$\left|A^1, A^2, \ldots, aA^j, \ldots, A^n\right| = a\left|A^1, A^2, \ldots, A^j, \ldots, A^n\right|$$

2. Si una matriz A tiene una columna (o fila) formada por dos sumandos; su determinante es igual a la suma de dos determinantes de la matriz, poniendo en el primer determinante los primeros sumandos y en el segundo determinante los segundos sumandos de dicha columna; esto es:

$$\left|A^1, A^2, \ldots, A^i + A^{i\,'}, \ldots, A^n\right| = \left|A^1, A^2, \ldots, A^i, \ldots, A^n\right| + \left|A^1, A^2, \ldots, A^{i\,'}, \ldots, A^n\right|$$

3. Si intercambiamos dos columnas (o dos filas) de una matriz, su determinante cambia de signo; esto es:

$$\left|A^1, A^2, \ldots, A^i, \ldots, A^j, \ldots, A^n\right| = -\left|A^1, A^2, \ldots, A^j, \ldots, A^i, \ldots, A^n\right|$$

4. El determinante de la matriz Identidad es igual a 1; esto es: $\left|I_n\right| = 1$

5. Si todos los elementos de una columna (o fila) de una matriz son ceros, entonces su determinante es cero; esto es:

$$\left|A^1, A^2, \ldots, 0, \ldots, A^n\right| = 0$$

6. Si una matriz tiene dos columnas (o filas) iguales, su determinante es cero: esto es:

$$\left|A^1, A^2, \ldots, A^i, \ldots, A^i, \ldots, A^n\right| = 0$$

7. Si una columna (o fila) de una matriz es el producto de otra por un escalar no nulo, su determinante es cero; esto es:

$$\left|A^1, A^2, \ldots, A^i, \ldots, aA^i, \ldots, A^n\right| = 0$$

8. Si una columna (o fila) de una matriz es la combinación lineal de otras, su determinante es cero; esto es:

$$\left|A^1, A^2, \ldots, A^i, \ldots, A^j, \ldots, aA^i + bA^j, \ldots, A^n\right| = 0$$

9. Si B se obtiene de A sumando a la columna j la columna i multiplicada por un escalar no nulo, esto es:

Si $A = \left|A^1, A^2, \ldots, A^i, \ldots, A^j, \ldots, A^n\right|$ y $B = \left|A^1, A^2, \ldots, A^i, \ldots, aA^i + A^j, \ldots, A^n\right|$

entonces | B | = | A |

10. Si A tiene filas o columnas linealmente dependientes, entonces | A | = 0

11. El determinante del producto de dos matrices es igual al producto de sus determinantes

$$|AB| = |A|.|B|$$

12. A es invertible si y sólo si $|A| \neq 0$ y en este caso el determinante de la inversa es igual al inverso del determinante; esto es:

$$|A^{-1}| = |A|^{-1}$$

13. Si A es triangular superior o triangular inferior o diagonal, su determinante es el producto de los elementos de la diagonal principal; esto es:

$$|A| = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

(Sugerencia: demuestre por inducción)

14. La suma de los productos de los elementos de una fila por los adjuntos de otra es cero; esto es:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_{hj} = 0 \text{ si } i \neq h$$

Demostración:

Vamos a demostrar unas pocas propiedades, el resto lo hará el lector.

1) Aplicando la definición de determinante a los elementos de la columna j, o sea la fórmula 4, se tiene:

$$\left|A^1, A^2, \ldots, aA^j, \ldots, A^n\right| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+J} a.a_{ij}\left|A_{ij}\right| = a\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+J} a_{ij}\left|A_{ij}\right| = a\left|A^1, A^2, A^j, ..., A^n\right|$$

2) Aplicando la definición de determinante a los elementos de la columna j, o sea la fórmula 4, se tiene:

$$\left|A^1, A^2, ..., A^i + A^{i\,'}, ..., A^n\right| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+J} (a_{ij} + a_{ij}')\left|A_{ij}\right| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+J} a_{ij}\left|A_{ij}\right| +$$

$$+\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+J} a_{ij}'\left|A_{ij}\right| = \left|A^1, A^2, ..., A^i, ..., A^n\right| + \left|A^1, A^2, ..., A^{i\,'}, ..., A^n\right|$$

6) Para demostrar esta propiedad es suficiente aplicar la 3 intercambiando las columnas iguales, cambia el signo del determinante, y quedaría:

$$\left|A^1, A^2, \ldots, A^i, \ldots, A^i, \ldots, A^n\right| = -\left|A^1, A^2, \ldots, A^i, \ldots, A^i, \ldots, A^n\right|$$

y esto se cumple únicamente cuando $\left|A^1, A^2, \ldots, A^i, \ldots, A^i, \ldots, A^n\right| = 0$

8) Es suficiente aplicar la 2 para separar en dos determinantes, y luego la 1; esto es:

$$\left|A^1, A^2, \ldots, A^i, \ldots, A^j, \ldots, aA^i + bA^j, \ldots, A^n\right| = \left|A^1, A^2, \ldots, A^i, \ldots, A^j, \ldots, aA^i, \ldots, A^n\right| +$$

$$+\left|A^1, A^2, \ldots, A^i, \ldots, A^j, \ldots, bA^j, \ldots, A^n\right| =$$

$$= a\left|A^1, A^2, \ldots, A^i, \ldots, A^j, \ldots, A^i, \ldots, A^n\right| + b\left|A^1, A^2, \ldots, A^i, \ldots, A^j, \ldots, A^j, \ldots, A^n\right| = 0$$

como estos dos determinantes tienen dos columnas iguales, por la 6 son iguales a cero.

12) Si A es invertible existe A^{-1} , luego A. A^{-1}=I, aplicando determinantes a los dos miembros y la propiedad 11, se tiene: $\left|A.A^{-1}\right| = 1 \Rightarrow |A|.\left|A^{-1}\right| = I \Rightarrow \left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{|A|} \Rightarrow \left|A^{-1}\right| = |A|^{-1}$

EJEMPLO 10

1) Dadas las siguientes matrices, hallar sus determinantes:

a) $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = -3-8 = -11$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = -2+18-8+6-24+2 = -8$

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -3 & -10 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -5 & 11 & 10 \end{vmatrix} =$

$$= \sum_{i=1}^{4} (-1)^{i+1} a_{i1}|A_{i1}| = 1.\begin{vmatrix} 5 & -3 & -10 \\ 2 & -3 & 1 \\ -5 & 11 & 10 \end{vmatrix} = -150+15-220+150+60-55 = -200$$

Como la matriz A del c) es de orden 4, hemos utilizado la propiedad 9 de los determinantes para introducir ceros en los puestos 21 y 41 de la primera columna. El cero del puesto 21 se obtuvo multiplicando la fila 1 por -2 y sumando a la fila 2; el cero del puesto 41 se obtuvo multiplicando la fila 1 por 3 y sumando a la fila 4; luego utilizamos la fórmula 2 de los determinantes aplicando a los elementos de la columna 1.

2) Sea $d_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & -1. & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & . & . & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & . & . & 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

Demostrar que: a) $d_1 = 2,\ d_2 = 5$, b) $\forall n\ n\geq 3\ \ d_n = 2d_{n-1} + d_{n-2}$

Desarrollo

En efecto, $d_1 = |2| = 2$, $d_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5$. Para hallar d_n aplicamos la segunda fórmula de los determinantes en el primer paso, y la primera en el segundo paso; así:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & . & . & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & . & . & 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{2} (-1)^{i+1} a_{i1}|A_{i1}| = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ -1 & 2 & 1 & . & . & . & 0 \\ 0 & -1 & 2 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & . & . & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & . & . & 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ -1 & 2 & 1 & . & . & . & 0 \\ 0 & -1 & 2 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & . & . & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & . & . & 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2d_{n-1} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ -1 & 2 & 1 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & -1 & 2 & 1 & 0 \\ . & . & 0 & -1 & 2 & 1 \\ . & . & 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2d_{n-1} + d_{n-2}$$

luego, hemos probado que $\forall n \ n \geq 3 \ d_n = 2d_{n-1} + d_{n-2}$

ACTIVIDAD EVALUATIVA 2

1) Escriba 1 ejemplo de cada uno de los 12 tipos de matrices de mayor comprensión suya.

2) Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Hallar: a) A+B, b) A-B, c) 4A-3B, d) AB, e) BC, f) $\frac{1}{2}A - \frac{2}{3}B$, g) Halle la matriz D tal que $A + \frac{1}{2}D = B$, h) Hallar la matriz E tal que sea AE = B, i) Escriba las opuestas de A,B,C

3) Demuestre que toda $\mathbf{A} \in M_{nxn}(K)$ se puede expresar como la suma de una matriz simétrica con una antisimétrica.

(Sugerencia: Utilice el hecho de que toda matriz simétrica se puede obtener como $\frac{A+A^t}{2}$ y toda matriz antisimétrica se puede obtener como $\frac{A-A^t}{2}$)

4) Demuestre por inducción que si $A^2 = A$ entonces $\forall n \in N \quad A^n = A$

5) Si $\mathbf{A} \in M_{nxn}(K)$ es simétrica e invertible, entonces A^{-1} es simétrica.
(Sugerencia: Aplicar la transpuesta miembro a miembro a la igualdad $A.A^{-1} = I$)

6) Hallar A^n, siendo: 1) $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, 2) $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

7) Escalone las siguientes matrices e indique sus respectivos rangos.

$$1)\ A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & -4 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 14 \end{bmatrix};\ 2)\ C = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 9 & 3 \\ 1 & -2 & 4 & 5 \\ 2 & -3 & 7 & 5 \\ 3 & -5 & 11 & 10 \end{bmatrix}$$

8) Halle la inversa de las siguientes matrices por todos los métodos vistos

$$1)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 13 & -8 \\ -1 & -3 & 3 \end{bmatrix};\ 2)\ D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 5 & -2 & -4 \\ -3 & -6 & 4 & 6 \\ -2 & -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

9) Halle los determinantes de las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 2 & 8 & -4 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 & -2 \\ 6 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

10) Hallar el valor de k en la siguiente matriz para que su determinante sea igual a 1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ k & -1 & 6 \\ 2 & -k & 7 \end{bmatrix}$$

SUGERENCIA: Para resolver del 11 al 15, utilice la siguiente operación elemental:

$$\forall i \quad 2 \le i \le n \quad F_{i\text{-}1} \leftarrow -F_i + F_{i\text{-}1}$$

11) Sea A = (a_{ij}) donde cada $a_{ij} = \max\{i, j\}$. Hallar | A |

12) Sea A = (a_{ij}) donde cada $a_{ij} = 2^{\min\{i,j\}}$. Hallar | A |. Resp: | A | = $2^{\frac{n^2-n+2}{2}}$

13) Sea A = (a_{ij}) donde cada $a_{ij} = 2^{\max\{i,j\}}$. Hallar | A |. Resp: | A | = $(-1)^{n-1}\, 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$

14) Sea A = (a_{ij}) donde cada $a_{ij} = 3^{\min\{i,j\}}$. Hallar | A |

15) Sea A = (a_{ij}) donde cada $a_{ij} = 3^{\max\{i,j\}}$. Hallar | A |

AYUDA. Las matrices de los ejercicios 12 y 13 son respectivamente las siguientes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & . & . & 2 & 2 \\ 2 & 2^2 & 2^2 & 2^2 & . & . & 2^2 & 2^2 \\ 2 & 2^2 & 2^3 & 2^3 & . & . & 2^3 & 2^3 \\ 2 & 2^2 & 2^3 & 2^4 & . & . & 2^4 & 2^4 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 2 & 2^2 & 2^3 & 2^4 & . & . & 2^{n-2} & 2^{n-2} \\ 2 & 2^2 & 2^3 & 2^4 & . & . & 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2 & 2^2 & 2^3 & 2^4 & . & . & 2^{n-1} & 2^n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 2^2 & 2^3 & 2^4 & . & . & 2^{n-1} & 2^n \\ 2^2 & 2^2 & 2^3 & 2^4 & . & . & 2^{n-1} & 2^n \\ 2^3 & 2^3 & 2^3 & 2^4 & . & . & 2^{n-1} & 2^n \\ 2^4 & 2^4 & 2^4 & 2^4 & . & . & 2^{n-1} & 2^n \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 2^{n-2} & 2^{n-2} & 2^{n-2} & 2^{n-2} & . & . & 2^{n-1} & 2^n \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} & 2^{n-1} & 2^{n-1} & . & . & 2^{n-1} & 2^n \\ 2^n & 2^n & 2^n & 2^n & . & . & 2^n & 2^n \end{bmatrix}$$

16) Sea $$d_n = \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ -b & a & b & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & -b & a & b & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & -b & a & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & -b & a & b & 0 \\ 0 & 0 & . & . & 0 & -b & a & b \\ 0 & 0 & . & . & 0 & 0 & -b & a \end{vmatrix}$$

Demostrar que: a) $d_1 = a$, $d_2 = a^2 + b^2$, b) $\forall n \;\; n \geq 3 \;\; d_n = a.d_{n-1} + b^2.d_{n-2}$