Dinámica II

Ing. Juan Neptali Obando Velasquez Mg
Ingeniería Civil Quito, Ecuador
juan.obandov@epn.edu.ec

6 de octubre de 2014

1. CINEMÁTICA EN EL PLANO DE UN CUERPO RÍGIDO

$\boxed{1.2}$ Movimiento de un cuerpo rígido

$\boxed{1.3}$ Traslación

$\boxed{1.4}$ Rotación en torno de un eje fijo

$\boxed{1.5}$ Análisis del movimiento en un plano absoluto en general

$\boxed{1.6}$ Análisis del movimiento relativo: velocidad

1.1. Clase 1 Movimiento Plano de un cuerpo rígido

En está clase analizaremos el movimiento plano de un cuerpo rígido,este estudio es importante en el diseño de engranajes , levas y mecanismos utilizados en muchas operaciones mecánicas.

Para estudio de este tema es necesario tener presente las leyes de la cinemática ,para poder aplicar las ecuaciones del movimiento , las cuales relacionan las fuerzas que actúan en el cuerpo con el movimiento del mismo

El movimiento plano de un cuerpo rígido ocurre cuando todas sus partícula se desplazan a lo largo de trayectorias equidistantes en un plano fijo. Existen tres tipos de movimiento que a continuación se detalla de acuerdo con su complejidad. ver la : Figura 1

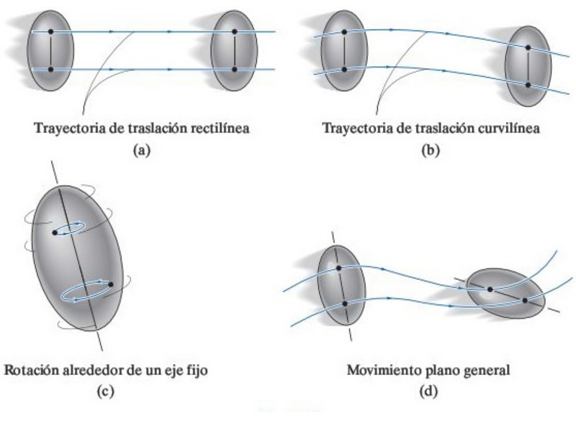

Figura 1: Movimientos plano de un cuerpo rígido

1.2. Rotación

Ocurre cuando una línea en el cuerpo permanece paralela a su orientación original durante todo el movimiento .Cuando las trayectorias del movimiento de dos puntos cualesquiera del cuerpo son lineas paralelas ,el movimiento se llama **TRASLACIÓN RECTILÍNEA** vea la figura 1-1a .Si las trayectorias del movimiento se desarrollan a lo largo de las líneas curvas equidistantes,el movimiento se llama **TRASLACIÓN CURVILÍNEA** vea la figura 1-1b

1.3. Rotación al rededor de un eje fijo

Ocurre cundo todas sus partículas ,excepto las que quedan en el eje de rotación,se mueven a lo largo de trayectorias circulares vea la figura 1-1c

1.4. Movimiento plano general

Ocurre cuando el cuerpo experimenta una combinación de traslación y rotación vea la figura 1-1d . La traslación se representa en un plano de referencia y la rotación ocurre al rededor de un eje perpendicular al plano de referencia.

Para analizar en detalle los tipos de movimientos veremos la : Figura 2

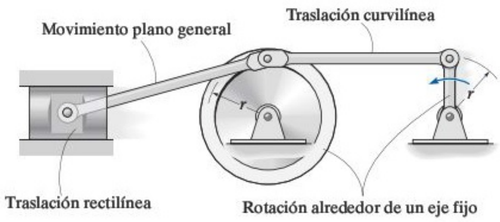

Figura 2: Tipos de movimiento de los cuerpos rígidos

2. Análisis de la Traslación rectilínea y curvilínea de un cuerpo rígido en el plano xy

Consideremos un cuerpo rígido sometido a la traslación rectilínea y curvilínea ver la Figura 3

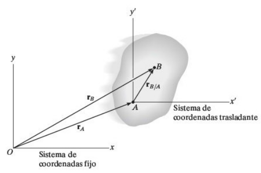

Figura 3: Traslación rectilínea

2.1. Posición

Las localizaciones de los puntos A y B en el cuerpo se definen con respecto a un sistema de referencia fijo x,y por medio de vectores de posición $r_A y r_B$ .El sistema de coordenadas $x'y'$ trasladante permanece fijo en el cuerpo con su origen en A ,conocido como punto base .La posición de B con respecto a A está denotada por el vector posición relativa $r_{B/A}$ y "se lee r de B con respecto a A "por suma vectorial

$$r_B = r_A + r_{B/A} \tag{1}$$

2.2. Velocidad

Una relación entre las velocidades instantáneas de A y B se obtiene mediante la derivada con respecto al tiempo de la ecuación 1 que resulta

$$v_B = v_A + \frac{dr_{B/A}}{dt} \tag{2}$$

donde v_A v_B son velocidades absolutas puesto que se miden con respecto al sistema de referencia fijo x,y y el término $\frac{dr_{B/A}}{dt} = 0$,puesto que la magnitud $r_{B/A}$ es constante por lo tanto se consigue:

$$v_B = v_A \tag{3}$$

2.3. Aceleración

Si derivamos con respecto al tiempo a la ecuación 3 se obtiene una relación similar :

$$a_A = a_B \tag{4}$$

Estas dos ecuaciones indican que todos los puntos de un cuerpo rígido sometidos a una traslación rectilínea y curvilínea se mueven con una misma velocidad y aceleración ,entonces tenemos el camino abierto para analizar la cinemática de dichos puntos:

2.4. Rotación al rededor de un eje fijo

Para el análisis aremos rotar al rededor de un eje fijo y tomaremos un punto P localizado en el cuerpo rígido que se desplaza a lo largo de una trayectoria circular y analizaremos el movimiento angular .

2.5. Movimiento angular

Como un punto no tiene dimensiones , no puede tener movimiento angulas .Solamente las líneas o cuerpos experimentan movimiento angular ver la Figura 4

Figura 4: Traslación rectilínea

2.6. Posición angular

La posición angular de r está definida por el ángulo θ , medido desde una línea de referencia fija hasta r

2.7. Desplazamiento angular

Mide el cambio de la posición angular puede medirse como una diferencial $d\theta$. La magnitud de este vector es $d\theta$,medida en grados , radianes o revoluciones , donde 1rev=2πrad que determina la regla de la mano derecha.

2.8. Velocidad angular

Mide el cambio con respecto al tiempo de la posición angular se conoce como velocidad angular ω (omega).

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \tag{5}$$

ver la Figura 5

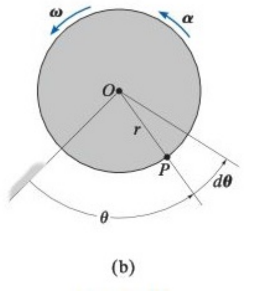

Figura 5: Velocidad angular

2.9. aceleración angular

La aceleración angular α mide el camio con respecto al tiempo de la velocidad angular la magnitud de este vector es :

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \tag{6}$$

También es posible expresar como:

$$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{7}$$

Nota: i) si ω decrece entonces α se llama desaceleración angular y por lo tanto su dirección se opone a ω.Al eliminar dt de las ecuaciones 5 y 6 se obtiene una relación diferencial entre la aceleración angular , la velocidad angular y el desplazamiento angular , es decir :

$$\alpha d\theta = \omega d\omega \tag{8}$$

2.10. aceleración angular contante

si la aceleración angular es constante entonces se integran las ecuaciones y se obtiene un conjunto de fórmulas , que relacionan la velocidad angular , la posición y el tiempo :

$$\omega = \omega_0 + a_c t \tag{9}$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha_c t^2 \tag{10}$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha_c(\theta - \theta_0) \tag{11}$$

2.11. Deducción de fórmulas

Para la ecuación 9 partimos de la $\alpha_c = constante$ y se deduce $\omega = \omega_0 + \alpha_c t$ siguiendo el procedimiento que a continuación se detalla:

$$\frac{d\omega}{dt} = \alpha_c$$

Despejando

$$d\omega = \alpha_c t$$

Integrando

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \alpha_c \int_{t_0}^{t} dt$$

Resolviendo tenemos

$$(\omega - \omega_0) = \alpha_c(t - t_0)$$

se deduce si $t_0 = 0seg$

$$\omega = \omega_0 + \alpha_c t$$

Para la ecuación 11 partimos de la $\alpha_c = constante$,y $\omega = \omega(\theta)$ aplicando la regla de la cadena se deduce $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha_c(\theta - \theta_0)$ siguiendo el procedimiento que a continuación se detalla:

$$\frac{d\omega}{dt} = \alpha_c$$

Aplicando la regla de la cadena

$$\frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \alpha_c$$

Integrando

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega\omega = \alpha_c \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta$$

Resolviendo tenemos

$$\frac{1}{2}(\omega^2 - \omega_0^2) = \alpha_c(\theta - \theta_0)$$

se deduce

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha_c(\theta - \theta_0)$$

2.12. Movimiento de un punto P

Cuando el cuerpo rígido de la figura 6 gira , el punto P se desplaza a lo largo de una trayectoria circular de radio r con el centro en el punto O .Esta trayectoria está contenida en el plano sombreado de la vista superior ver la Figura 6

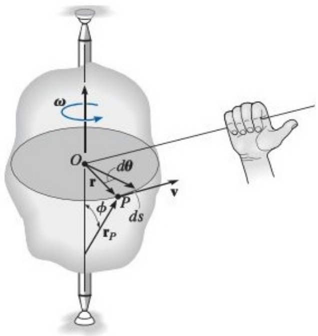

Figura 6: Velocidad angular